ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (IV, 39. V, 10, 11, 12, VI, ΛΗΜΜΑΤΑ 1, 2, ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12)

[Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ἐκδόσεως παρ' ἡμῶν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου (σελίδες 576), Ἰούλιος 1964, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων Ὑπουργείου Παιδείας δημοσιεύομεν κατωτέρω ἀνάλυσιν προβλημάτων τινων ἐξ αὐτῶν].

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 39ον, IVου βιβλίου

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\omega > z > y$. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\omega - z}{z - y} = \rho, \quad (1), \quad y + z = \alpha^2, \quad (2), \quad z + \omega = \beta^2, \quad (3), \quad y + \omega = \gamma^2, \quad (4).$$

Λαμβάνει $\rho = 3$ καὶ $y + z = \alpha^2 = 4$. Κατὰ συνέπειαν εἶναι $z > 2$, ἀφοῦ $z > y$. Ἔστω $z = x + 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει ἐκ τῆς (2), $y + x + 2 = 4$, $y = 2 - x$, (5). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\omega - (x+2) = 3[x + 2 - (2 - x)]$, $\omega = 7x + 2$. Ἐκ τῆς (3) εἶναι $8x + 4 = \beta^2$, (6) καὶ ἐκ τῆς (4), $6x + 4 = \gamma^2$, (7). Αἱ ἐξισώσεις (6, 7), παρατηρεῖ, εἶναι συναληθεύουσαι (διπλοῖσότης). Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $2x = \beta^2 - \gamma^2 = (\beta + \gamma)(\beta - \gamma)$. Ἀναλύει τὸν $2x$ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, $2x = \frac{x}{2} \cdot 4$ καὶ καλεῖ $\beta + \gamma = 4$ καὶ $\beta - \gamma = \frac{x}{2}$ (μέθοδος διπλοῖσότητος). Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφιαρέσεως τούτων λαμβάνει

$$\beta = \frac{x}{4} + 2, \quad \gamma = 2 - \frac{x}{4}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ β ἢ γ, διὰ τῆς τιμῆς του, εἰς τὴν (6) ἢ (7) ἀντιστοίχως λαμβάνει $x = 112$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνεται $y < o$. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ὅθεν πρέπει νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ x, ὥστε $o < x < 2$. Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ εἶναι ἐκ τῆς (7), $6x + 4 = y^2 < 16$, (8), ἐν ᾧ ὅταν $x = 2$ εἶναι $y^2 = 16$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $6x + 4 = y^2$, $8x + 4 = \beta^2$, $\alpha^2 = 4$ ἔχομεν τρία τετράγωνα μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ σχέσις $8x + 4 < 6x + 4 < 4$, ἀφοῦ $o < x < 2$. Ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι $2x$. Τοῦ δὲ μεσαίου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου εἶναι $6x$, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία τετράγωνα πλη-

ροῦντα τὰς σχέσεις αὐτάς, τῶν ὁποίων τὸ μικρότερον νὰ εἶναι 4, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ μεσαῖον τῶν τετραγώνων τούτων νὰ εἶναι <16, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ θετικὴ λύσις. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ $\beta^2 > \gamma^2 > 4$, ὅπου $\gamma^2 < 16$. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 4), \quad (9), \quad \text{ὅπου } \gamma^2 < 16, \quad (10).$$

Λαμβάνει $\gamma = t+2$, $\gamma^2 = t^2+4t+4$. Δι' ἀντικατασάσεως εἰς τὴν (9) εἶναι

$$\beta^2 = \frac{4}{3}t^2 + \frac{16}{3}t + 4.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 9 εἶναι, τετράγωνος $= 12t^2+48t+36$ καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ 4 εἶναι, τετράγωνος $= 3t^2+12t+9$, (11). Ἐκ τῆς (10) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ γ εἶναι $(t+2)^2 < 16$, $t+2 < 4$, $t < 2$, (12). Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ t λαμβάνει δοκιμαστικῶς εἰς τὴν σχέσιν (11), $3t^2+12t+9 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (3-\mu t)^2$, (13), ὅπου ὁ μ θὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$t = \dfrac{6\mu+12}{\mu^2-3}$. Καὶ ἐκ τῆς (12), $t = \dfrac{6\mu+12}{\mu^2-3} < 2$ ἢ $6\mu+12 < 2\mu^2-6$, $6\mu+18 < 2\mu^2$.

Ἐπιλύοντες τὴν ἀνισότητα ταύτην κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου ἔχομεν

$$\mu^2-3\mu > 9, \quad \left(\mu - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}+9, \quad \mu - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{45}}{2}, \quad \mu > \frac{3+\sqrt{45}}{2}, \quad (14).$$

Ἀλλὰ $6 < \sqrt{45} < 7$. Ἐὰν λάβῃ ἀντὶ τῆς $\sqrt{45}$, τὸν 6, ἡ ἀνισότης (14) ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον καὶ θὰ εἶναι

$$\mu > 4\frac{1}{2}. \quad \text{Ἐὰν λάβῃ } 7 \text{ ἀντὶ } \sqrt{45} \text{ θὰ εἶναι } \mu \geqq 5.$$

Λαμβάνει $\mu = 5$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται

$$3t^2+12t+9 = (3-5t)^2, \text{ ἐξ ἧς } t = \frac{21}{11} < 2$$

Καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\gamma = t+2$, εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως

$$\gamma = \frac{43}{11}, \quad \gamma^2 = \frac{1849}{121}.$$

Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$6x+4 = \gamma^2 = \frac{1849}{121}, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{1365}{726} < 2.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $y = 2-x = 2-\dfrac{1365}{726} = \dfrac{87}{726}$, $z = x+2 = \dfrac{2817}{726}$, $\omega = 7x+2 = \dfrac{11007}{726}$ ἢ

$$y = \frac{14\frac{1}{2}}{121}, \quad z = \frac{469\frac{1}{2}}{121}, \quad \omega = \frac{1834\frac{1}{2}}{121} \text{ ἢ } y = \frac{58}{484}, \; z = \frac{1878}{484}, \; \omega = \frac{7338}{484},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{\omega-z}{z-y} = \frac{5460}{1820} = 3 \text{ καὶ } \omega+z = \left(\frac{96}{22}\right)^2, \quad z+y = \left(\frac{44}{22}\right)^2, \quad \omega+y = \left(\frac{86}{22}\right)^2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10ον Νου βιβλίου

Τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ἔχει ὡς ἑξῆς: Νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μὲν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὸ δέ, ἄλλος δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ἑκάστοτε τετράγωνος.

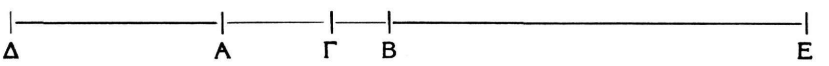
Ἔστωσαν τὰ κλάσματα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ μονὰς y καὶ z καὶ οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α_1 καὶ α_2. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$y+z=1, \quad (1), \quad y+\alpha_1=\beta^2, \quad z+\alpha_2=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\alpha_1=2$ καὶ $\alpha_2=6$ ὁπότε εἶναι

$$y+2=\beta^2, \quad (2) \text{ καὶ } \quad z+6=\gamma^2, \quad (3).$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν τῶν 'Αριθμητικῶν ὅπου χρησιμοποιοῦνται εὐθύγραμμα τμήματα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν



Ἔστω $AB=1$, $A\Gamma=y$, $\Gamma B=z$, $A\Delta=2$, $BE=6$, $A\Gamma+\Gamma B=1$.

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων ἕπεται, $\Delta E=9$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\Delta\Gamma=$τετράγωνος, $\Gamma E=$τετράγωνος, ἤτοι ὁ 9 $(=\Delta E)$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς $\Gamma\Delta$ καὶ ΓE. Καὶ ἐπειδὴ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων, ὁ $\Gamma\Delta$, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $A\Delta=2$ καὶ μικρότερος τοῦ $\Delta B=3$, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 9 εἰς δύο τετραγώνους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3. Ὅταν εὑρεθῇ ὁ τετράγωνος $\Gamma\Delta$, δι' ἀφαιρέσεως ἀπ' αὐτοῦ, τοῦ $A\Delta$, εὑρίσκεται, λέγει, ὁ $A\Gamma$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως τούτου ἀπὸ τοῦ AB εὑρίσκεται ὁ $B\Gamma$.

Ἔστω ὁ εἷς τῶν τετραγώνων ὁ x^2, ὁπότε $2<x^2<3$, (4). Ὁ ἄλλος ζητούμενος τετράγωνος θὰ εἶναι $9-x^2$. Οὗτος ὑπολογίζεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν ('Ιδὲ ΠΛΑΤΩΝ, ἔτος ΙΕ', 1963, τεύχη Α' καὶ Β'' 29/30, σελὶς 287). 'Αντὶ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, εἰς τὴν σχέσιν (4), λαμβάνει δύο τετραγώνους ἀριθμούς, τὸν μὲν $\frac{289}{144}>2$, τὸν δὲ $\frac{361}{144}<3$ καὶ λέγει ὅτι ἐὰν κατασκευάσῃ $\frac{289}{144}<x^2<\frac{361}{144}$, θὰ λύσῃ τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι

$$\frac{17}{12}<x<\frac{19}{12}, \quad (5).$$

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου $(9-x^2)$ νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη (5). Θέτει κατὰ τὸ II, 8

$$9-x^2=(3-\mu x)^2, \quad (6)$$

ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $x=\frac{6\mu}{\mu^2+1}$, ὁπότε κατὰ τὴν (5) πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{17}{12}<\frac{6\mu}{\mu^2+1}<\frac{19}{12}.$$

Θεωρεῖ τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{17}{12} < \frac{6\mu}{\mu^2+1}$, τὴν ὁποίαν λύει κατὰ τὸν γνωστόν του τρόπον, ἤτοι

$$72\mu > 17\mu^2+17, \qquad 17^2\mu^2-17\cdot 72\mu < -17^2,$$

$$(17\mu-36)^2 < 36^2-17^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}.$$

Ἀλλὰ $31 < \sqrt{1007} < 32$. Θέτει

$$\mu \leqq \frac{36+31}{17} = \frac{67}{17}, \quad \left(\text{λέγων ὅτι ὁ } \mu \text{ δὲν εἶναι } > \frac{67}{17}\right).$$

Ἀκολούθως θεωρεῖ τὴν ἄλλην ἀνισότητα $\frac{6\mu}{\mu^2+1} < \frac{19}{12}$, τὴν ὁποίαν λύει ὁμοίως, ἤτοι

$$19\mu^2+19 > 72\mu, \qquad 19^2\mu^2-19\cdot 72\mu > -19^2,$$

$$(19\mu-36)^2 > 36^2-19^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu > \frac{36+\sqrt{935}}{19}.$$

Ἀλλὰ $30 < \sqrt{935} < 31$. Θέτει $\mu \geqq \frac{36+30}{19} = \frac{66}{19}$, $\left(\text{λέγων, ὅτι ὁ } \mu \text{ δὲν εἶναι } < \frac{66}{19}\right)$.

Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{66}{19} \leqq \mu \leqq \frac{67}{17}$, λαμβάνει $\mu = 3\frac{1}{2}$ (κατὰ προσέγγισιν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν) καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν σχέσιν (6) ὁπότε λαμβάνεται

$$9-x^2 = \left(3-3\frac{1}{2}x\right)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = \frac{84}{53} \quad \text{καὶ} \quad x^2 = \frac{7056}{2809}.$$

Τὰ ζητούμενα ἄρα κλάσματα τῆς μονάδος θὰ εἶναι

$$y = x^2-2, \quad \frac{7056}{2809}-2 = \frac{1438}{2809} \quad \text{καὶ} \quad z = 1-\frac{1438}{2809} = \frac{1371}{2809},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1438}{2809}+\frac{1371}{2809} = 1.$$

[Σημείωσις: Ἐπειδὴ ὁ μ ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν $3\frac{1}{2}$, δὲν ἐπαληθεύεται ἡ σχέσις (5) ἐκ τῆς τιμῆς $x = \frac{84}{53}$, διότι εἶναι μὲν $\frac{17}{12} < \frac{84}{53}$, ὄχι ὅμως $\frac{84}{53} < \frac{19}{12}$. Τοῦτο δὲν ἐπηρεάζει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος].

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ὑφ' ἑκάστου τετράγωνος.

Περιορισμός: Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος ἀριθμὸς νὰ μὴ εἶναι 2, οὔτε ἄθροισμα τοῦ 2 σὺν πολλαπλάσιον τοῦ 8.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ τμήματα τῆς μονάδος y, z, ω καὶ τὸν προστιθέμενον εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν δ θὰ ἔχωμεν

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta=\alpha^2, \quad z+\delta=\beta^2, \quad \omega+\delta=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta=3$, ὁπότε τὸ πρόβλημα γίνεται

$$y+z+\omega=1, \ (1), \quad y+3=\alpha^2, \ (2), \quad z+3=\beta^2, \ (3), \quad \omega+3=\gamma^2, \ (4).$$

Ἐκ τῶν (2, 3. 4) εἶναι διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη $y+z+\omega+9=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, καὶ ἐκ τῆς (1), $10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Ἑπομένως πρέπει ὁ 10 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3. Ἐφαρμόζει πρὸς τοῦτο τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἔχει ὀνομάσει «παρισότητος ἀγωγήν», δηλ. μέθοδον προσεγγίσεως καὶ ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει εἰς τὸ 9ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου.

Κατὰ ταύτην, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς τρία τετράγωνα λαμβάνει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα θὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὸ διὰ νὰ προκύψῃ τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{x^2}=\text{τετράγωνος}, \ (5).$$

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου ὅρου δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 θέτει

$$x=3t \quad \text{καὶ} \quad x^2=9t^2, \ (6).$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{30}{9}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος},$$

καὶ ἐκ ταύτης $30t^2+1=\text{τετράγωνος}\cdot 9t^2=\text{τετράγωνος}$.

Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(5t+1)^2$, ὁπότε εἶναι

$$30t^2+1=(5t+1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad t=2,$$

καὶ ἐκ τῆς (6) εἶναι $x^2=36$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Τρία τετράγωνα ἴσα, πλευρᾶς ἕκαστον $\frac{11}{6}$, εἶναι

$$3\cdot\frac{121}{36}=\frac{363}{36}>10.$$

Ὅθεν πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ γίνῃ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$.

Ὁ 10 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι εἶναι $10=3^2+1^2$. (Σημείωσις: Ἡ μέθοδος προσεγγίσεως ἐφαρμόζεται μόνον, ὅταν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων). Καὶ εἶναι $1^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$10=9+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}.$$

Αἱ πλευραὶ τῶν 3 τούτων τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$. Τρέπει τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν

$$\left(3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{11}{6}\right)$$

εἰς ὁμώνυμα κλάσματα $\left(\frac{90}{30}, \frac{24}{30}, \frac{18}{30}, \frac{55}{30}\right)$

καὶ παραλείπων τοὺς παρονομαστὰς λέγει ὅτι ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν τριῶν τετραγώνων εἶναι ἴσαι πρὸς 55, πρέπει νὰ εἶναι $55=90-\kappa=24+\lambda=18+\mu$, ὅπου οἱ κ, λ, μ θὰ προσδιορισθοῦν.

Ἐκ τούτων λαμβάνεται $\kappa=35$, $\lambda=31$, $\mu=37$.

Θὰ εἶναι ἄρα

$$3\left(\frac{55}{30}\right)^2=\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2.$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν τριῶν τούτων ἴσων τετραγώνων εἶναι $\frac{363}{36}$, ὅπερ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 10 ἐκφράζει τὰς πλευρὰς αὐτῶν συναρτήσει τοῦ x, (ἄλλος x τώρα), θέτων

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι

$$3555x^2+10-116x=10, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{116}{3555}.$$

Ἑπομένως τὰ τρία ζητούμενα τετράγωνα καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι

$$\alpha^2=\left(3-35\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1745041}{505521}, \quad \alpha=\frac{1321}{711}$$

$$\beta^2=\left(\frac{4}{5}+31\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1658944}{505521}, \quad \beta=\frac{1288}{711}$$

$$\gamma^2=\left(\frac{3}{5}+37\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1651225}{505521}, \quad \gamma=\frac{1285}{711}$$

Ὅθεν εἶναι :

ἐκ τῆς (2), $\quad y=\alpha^2-3=\frac{228478}{505521}$

ἐκ τῆς (3), $\quad z=\beta^2-3=\frac{142381}{505521}$

ἐκ τῆς (4), $\quad \omega=\gamma^2-3=\frac{134662}{505521}$

Καὶ εἶναι $\quad \frac{228478+142381+134662}{505521}=\frac{505521}{505521}=1.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἷς δοθείς, διάφορος εἰς ἕκαστον, ἀριθμός, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστος τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ἡ μονάς, οἱ y, z, ω καὶ τρεῖς προστιθέμενοι εἰς αὐτοὺς ἀντιστοίχως ἀριθμοί, οἱ δ_1, δ_2, δ_3, ὁπότε κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta_1=\alpha^2, \quad z+\delta_2=\beta^2, \quad \omega+\delta_3=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta_1=2$, $\delta_2=3$, $\delta_3=4$, ὁπότε εἶναι $y+z+\omega=1$, (1), $y+2=\alpha^2$, (2), $z+3=\beta^2$, (3), $\omega+4=\gamma^2$, (4).

Ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4, 1) εἶναι $y+z+\omega+2+3+4=10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἀνάγεται ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερος τοῦ 2 τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Προσθέτει εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων, $\frac{1}{2}$ καὶ λέγει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$2<\alpha^2<2\tfrac{1}{2}, \quad 3<\beta^2<3\tfrac{1}{2}, \quad 4<\gamma^2<4\tfrac{1}{2}.$$

Κατόπιν τούτων λέγει ὅτι ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ $10=1^2+3^2$ εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων,

$$10=\alpha^2+\lambda^2, \quad \text{ἐξ ὧν} \quad 2<\alpha^2<2\tfrac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \alpha^2-2=y.$$

Καὶ πάλιν ἀναλύει τὸν λ^2 εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς β^2, γ^2, ὥστε νὰ εἶναι

$$3<\beta^2<3\tfrac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 4<\gamma^2<4\tfrac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \beta^2-3=z \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2-4=\omega.$$

[Σημείωσις: Ὁ Διόφαντος ὑποδεικνύει τὴν λύσιν μέχρις ἐδῶ. Τὴν συνέχειαν τῆς λύσεως διετύπωσε πρῶτος ὁ G. Wertheim εἰς τὴν γερμανιστὶ ἔκδοσίν του τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, σελὶς 218, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890].

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α^2 χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον προσεγγίσεως (παρισότητος ἀγωγὴν) τὴν χρησιμοποιουμένην ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸ πρόβλημα 9 τοῦ V βιβλίου.

Θέλομεν νὰ εἶναι $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν κλάσμα τῆς μονάδος τετραγωνικόν, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω $\frac{5}{2}+\frac{1}{x^2}=$τετράγωνος, (5).

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{10}{4}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος},$$

$$\text{ἢ} \quad 10t^2+1=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἔστω}=(3t+1)^2.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $t=6$, $t^2=36$, $x^2=4\cdot t^2=4\cdot 36=144$. Δ' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{144}=\frac{361}{144}=\left(\frac{19}{12}\right)^2.$$

Ἀφοῦ τὸ ἓν βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $2\frac{1}{2}$ ἢ κατὰ προσέγγισιν

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 = 2\frac{73}{144} > \frac{5}{2},$$

τὸ ἄλλο θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $7\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν καὶ ἐδῶ τετραγωνικὸν κλάσμα τῆς μονάδος, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν $7\frac{1}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον. Ἔστω $\frac{15}{2} + \frac{1}{x^2}$ =τετράγωνος.

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{15}{2} + \frac{1}{4t^2}$ = τετράγωνος, ἢ $\frac{30}{4} + \frac{1}{4t^2}$ = = τετράγωνος, $30t^2+1$ = τετράγωνος, ἔστω $=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2$, $t^2=4$, $x^2=4\cdot 4=16$.

Ἑπομένως τὸ δεύτερον βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $7\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7\frac{9}{16} > 7\frac{1}{2}$.

Αἱ πλευραὶ τῶν δύο εὑρεθέντων βοηθητικῶν τετραγώνων εἶναι

$$\frac{19}{12} \text{ καὶ } \frac{11}{4} \text{ ἢ } \frac{19}{12} \text{ καὶ } \frac{33}{12}.$$ Ἐπειδὴ ὅμως

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2 = \frac{1450}{144} > 10$$

πρέπει αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων νὰ ἐλαττωθῶσιν, ὥστε τὰ δύο τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10.

Ὁ $10=1^2+3^2$. Εἶναι δὲ ἀκόμη $10 \backsim \left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2$.

Συγκρίνομεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς δευτέρας ἀναλύσεως τοῦ 10 πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς πρώτης ἀναλύσεως. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} \quad \text{καὶ} \quad \frac{33}{12} = 3 - \frac{3}{12}.$$

Πρέπει λοιπὸν αἱ πλευραὶ τῶν δύο βοηθητικῶν τετραγώνων, αἱ $\left(1+\frac{7}{12}\right)$ καὶ $\left(3-\frac{3}{12}\right)$ νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10. Ἐκφράζομεν τὰς ζητουμένας αὐτὰς πλευρὰς συναρτήσει τοῦ x καὶ τῶν προηγουμένων τιμῶν ὁπότε ἔχομεν $(1+7x)^2 + (3-3x)^2 = 10$.

(Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν λαμβάνονται μικρότεροι ἀριθμοί). Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ἔχομεν $x = \frac{2}{29}$.

Ὥστε τὸ πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι

$$\left(1+7\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{43}{29}\right)^2 = \frac{1849}{841}$$

καὶ τὸ δεύτερον εἶναι

$$\left(3-3\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{81}{29}\right)^2 = \frac{6561}{841}.$$

Εἶναι δὲ $2 < \frac{1849}{841} < 2\frac{1}{2}$. Τώρα πρέπει τὸ δεύτερον τετράγωνον $\frac{6561}{641}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων διὰ νὰ ἔχῃ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν. Καλοῦμεν τὸ ἓν τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2, ὁπότε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841} - x^2.$$ Θέλομεν ὅμως, ὅπως $3 < x^2 < 3\frac{1}{2}$.

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοιοῦτο τετράγωνον ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ 10ου προβλήματος τοῦ V βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν. Θέτομεν τὸν x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων, ἐκλέγοντες δύο τετράγωνα εὑρισκόμενα ἐγγὺς τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Τοιαῦτα τετράγωνα εἶναι τὰ

$$\frac{49}{16} \text{ καὶ } \frac{64}{16}.$$ Ὥστε: $\frac{49}{16} < x^2 < \frac{64}{16}$ καὶ $\frac{7}{4} < x < \frac{8}{4}$, (5).

Ἐξισώνομεν τῶρα τὸ τετράγωνον $\frac{6561}{841} - x^2$ πρὸς ἓν τετράγωνον τῆς μορφῆς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$, ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. [Ἡ θέσις τοῦ x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων γίνεται κατὰ τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου. Ἡ ἐξίσωσις πρὸς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$ γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν]. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{6561}{841} - \mu x^2 = \left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}, \quad (6).$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι κατὰ τὴν σχέσιν (5)

$$\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4}.$$

Ἐπιλύομεν τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}$ κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου:

$$203(\mu^2+1) < 648\,\mu, \quad \mu^2+1 < \frac{648\,\mu}{203}, \quad \mu^2 - \frac{648\,\mu}{203} < -1, \quad \left(\mu - \frac{324}{203}\right)^2 < -1 + \left(\frac{324}{203}\right)^2,$$

ἐξ ἧς $\mu < 2{,}84$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνισότητος

$$\frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4}$$ τὴν τιμὴν $\mu > 2{,}37$, ὁπότε ἔχομεν $2{,}37 < \mu < 2{,}84$.

Λαμβάνομεν $\mu = 2\frac{1}{2}$, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν τὸν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν 2,37 καὶ 2,84, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (6) ἔχομεν

$$x = \frac{1620}{841}, \quad x^2 = \frac{2624400}{707281},$$

ἔχομεν δηλαδὴ τὸν πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τετράγωνος $\frac{6561}{418}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x^2 εἰς τὴν σχέ-

σιν $\frac{6561}{841}-x^2$ λαμβάνομεν τὸν δεύτερον τετράγωνον ὅστις θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841}-\frac{2624400}{707281}=\frac{2893401}{707281}=\left(\frac{1701}{841}\right)^2.$$

Ὥστε οἱ τρεῖς τετράγωνοι εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 10, πληρουμένων τῶν τριῶν συνθηκῶν

$$2<\alpha^2<2\frac{1}{2},\quad 3<\beta^2<3\frac{1}{2},\quad 4<\gamma^2<4\frac{1}{2}$$

εἶναι $\alpha^2=\frac{1849}{841}$, $\beta^2=\frac{2624400}{707281}$, $\gamma^2=\frac{2893501}{707281}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2, 3, 4)

$$y=\frac{1849\cdot 841}{841\cdot 841}-2=\frac{140447}{707281},\quad z=\frac{2624400}{707281}-3=\frac{502557}{707281}$$

$$\omega=\frac{2893401}{707281}-4=\frac{64277}{707281}.$$ Εἶναι δὲ $y+z+\omega=1$.

[Σημ. Ὁ β^2 δὲν εἶναι $<3\frac{1}{2}$, ἀλλὰ εἶναι $\beta^2<4$. Ἔπρεπε νὰ τεθῇ ὁ x^2 μεταξὺ τῶν ὁρίων $\frac{49}{16}<x^2<\left(\frac{23}{12}\right)^2$, διότι ὁ τετράγωνος $\frac{529}{144}$ εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὸν $3\frac{1}{2}$ ἢ ὁ τετράγωνος $\frac{64}{16}$. ὁ β^2 γίνεται $<3\frac{1}{2}$, ἂν τεθῇ $\mu=2\frac{7}{10}$, ἀντὶ $\mu=2\frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως τῆς ἀλλαγῆς τῆς τιμῆς τοῦ μ θὰ ἐπηρεάζοντο αἱ τιμαὶ τῶν z, ω].

ΛΗΜΜΑ 1ον VIου βιβλίου
χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος εἶναι τετράγωνος, προσέτι δὲ ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὴν μικροτέραν κάθετον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $y>z$. Κατὰ τὸ λῆμμα θὰ εἶναι

$$y-z=\alpha^2,\ (1),\quad y=\beta^2,\ (2),\quad \frac{1}{2}yz+z=\gamma^2,\ (3).$$

Κατασκευάζει ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν μ, ν κατὰ τὴν ταυτότητα

$$(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$$

καὶ λαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν κάθετον $y=2\mu\nu$ καὶ τὴν μικροτέραν $z=\mu^2-\nu^2$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $2\mu\nu-(\mu^2-\nu^2)=\alpha^2$.

Τοῦτο λέγει συμβαίνει πάντοτε ἂν ἐκ τῶν λαμβανομένων δύο ἀριθμῶν μ, ν ὁ μεγαλύτερος εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἔστω $\mu=2\nu$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα λαμβάνει

$$4\nu^2-(4\nu^2-\nu^2)=\nu^2,$$

ὁπότε πληροῦται καὶ ἡ συνθήκη (2),

$$y=2\mu\nu=4\nu^2=\beta^2.$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως

$\frac{1}{2} \cdot 4\nu^2 \cdot (4\nu^2-\nu^2)+(4\nu^2-\nu^2)=y^2$, ἢ $6\nu^4+3\nu^2=y^2$, ἢ $6\nu^2+3=(y^2:\nu^2)$=τετράγωνος, (4).

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, λέγει, εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ τετραγώνου του σὺν 3 νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί, ὁπότε $\nu=1$ καὶ $\mu=2$.

Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ πληροῦσι τὰς συνθήκας (1, 2, 3) κατασκευάζεται ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 1 καὶ 2, ὁπότε θὰ ἔχῃ πλευρὰς (4, 3, 5).

[Σημείωσις

Διὰ τὴν σχέσιν (4) λέγει ὁ Διόφαντος ὅτι αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ τῆς μονάδος ($\nu=1$) καὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν. «Ἔστι δὲ ἡ μονὰς μία (ἡ ἐπαληθεύουσα) καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί». Οὐδὲν σχόλιον ἐσώθη ἐξ οὗ νὰ φαίνεται πῶς εὑρίσκονται οἱ ἄλλοι ἄπειροι αὐτοὶ ἀριθμοί. Τοῦτο βεβαίως ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Διόφαντον, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἔγραφε περὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου τρόπους πρὸς εὕρεσιν τῆς μονάδος ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν (4), τὴν ὁποίαν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $6x^2+3=y^2$,

θὰ ἔχωμεν $6x^2+3=(2x\pm1)^2$, ἐξ ἧς $x=\pm1$.

Ὁ δεύτερος ἀκέραιος, ἐκτὸς τῆς μονάδος, ὁ ὁποῖος ἐπαληθεύει τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν εἶναι ὁ 11, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως

$6x^2+3=(3x\pm6)^2$, ἐξ ἧς εἶναι $x=\pm11$ καὶ ± 1.

Τὸ πρόβλημα, ὑπὸ τὴν γενικήν του μορφὴν

$$ax^2+\beta=y^2, \quad (5)$$

ἔλυσεν ὁ **Euler** διὰ τεχνάσματος, χρησιμοποιήσας τὴν μέθοδον τῆς διπλοϊσότητος τοῦ Διοφάντου. Ἐν συνεχείᾳ ὁ **Euler** εὑρίσκει καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5).

Ἡ λύσις τοῦ **Euler**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $ax^2+\beta=y^2$, ὅπου α, β ἀκέραιοι εἶναι ἀναποφεύκτως ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν ἢ νὰ μαντεύσωμεν τοὐλάχιστον μίαν λύσιν αὐτῆς· διότι ἄλλως θὰ ἦτο ματαιοπονία νὰ ζητῶμεν τοιούτους ἀριθμούς, ἐπειδὴ ἴσως ἡ παράστασις νὰ μὴ λύεται.

Ὅθεν δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει μία λύσις ἂν θέσωμεν $x=f$, ὁπότε τὸ προκῦπτον τετράγωνον ἔστω g^2 καὶ ἡ παράστασις νὰ γίνεται $af^2+\beta=g^2$, ὅπου f καὶ g εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοί.

Ἐκ τούτου εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ ἴδωμεν πῶς θὰ εὕρωμεν ἀκόμη ἄλλας περιπτώσεις. Ἡ ἔρευνα αὕτη εἶναι τόσον σπουδαιοτέρα, ὅσον περισσοτέρας δυσκολίας ἐμφανίζει, τὰς ὁποίας ὅμως ἡμεῖς θὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ τῶν ἀκολούθων τεχνασμάτων.

Ἐπειδὴ εὑρέθη ἤδη ἡ λύσις $af+\beta=g$ καὶ ἐκτὸς τούτου δέον ὅπως εἶναι $ax^2+\beta=y^2$, ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἔχομεν

$$ax^2-af^2=y^2-g^2.$$

Τὴν παράστασιν ταύτην ἀναλύομεν εἰς γινόμενα παραγόντων (σημ. συγγ. μέθοδος διπλοϊσότητος τοῦ Διοφάντου) καὶ ἔχομεν

$$a(x+f)\,(x-f)=(y+g)\,(y-g).$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον pq καὶ ἔχομεν

$$apq\,(x+f)\,(x-f)=pq\,(y+g)\,(y-g).$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν χωρίζομεν εἰς

$$ap\,(x+f)=q\,(y+g) \quad \text{καὶ} \quad q\,(x-f)=p\,(y-g)$$

καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς x καὶ y. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν σχέσεων τούτων διαιρουμένη διὰ q δίδει

$$y+g=\frac{apx+apf}{q},$$

ἡ δὲ δευτέρα διαιρουμένη διὰ p δίδει $y-g=\frac{qx-qf}{p}$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν ἐκ τῆς πρώτης θὰ ἔχωμεν

$$2g=\frac{(ap^2-q^2)x+(ap^2+q^2)f}{pq}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ pq λαμβάνομεν $2pqg=(ap^2-q^2)\,x+(ap^2+q^2)f$ καὶ ἐκ ταύτης $x=\frac{2gpq}{ap^2-q^2}-\frac{(ap^2+q^2)f}{ap^2-q^2}$.

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν

$$y=g+\frac{2gq^2}{ap^2-q^2}-\frac{(ap^2+q^2)fq}{(ap^2-q^2)p}-\frac{qf}{p} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{g(ap^2+q^2)-2afpq}{ap^2-q^2}.$$

Δι' ἄλλου τεχνάσματος εὑρίσκει ὁ **Euler** τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5). [Leonhard **Euler**, Vollständige Anleitung zur Algebra, Reclam, Stuttgart, von Joseph E. Hofmann, 1959, σελ 414)].

Λ Η Μ Μ Α 2ον. VIου βιβλίου χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Ἐκ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι τῶν ὁποίων ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα καὶ προσλαβὼν τὸν ἄλλον σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ α καὶ β, ὥστε $\alpha+\beta=\kappa^2$. Εἶναι δυνατὸν λέγει νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι ἀριθμοὶ

$$\lambda^2,\ \mu^2,\ \ldots\ \text{ὥστε νὰ εἶναι}\ \alpha\lambda^2+\beta=\tau^2,\ \beta\mu^2+\alpha=\sigma^2\ \ldots.$$

Λαμβάνει α=3, β=6, ὁπότε εἶναι $3+6=3^2$.

Κατὰ τὸ λῆμμα εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι, $\lambda^2,\ \mu^2,\ \ldots.$ ὥστε νὰ εἶναι

$$3\lambda^2+6=\tau^2,\ (1),\quad 6\mu^2+3=\sigma^2,\ (2).$$

Ἔστω $\lambda^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι

$$3(x^2+2x+1)+6=\tau^2,\ \text{ἢ}\ 3x^2+6x+9=\tau^2,\ \text{ἔστω}=(3-3x)^2.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι x=4. Θὰ εἶναι ἄρα $\lambda^2=(x+1)^2=(4+1)^2=25$ καὶ εἶναι

$$3{,}25+6=9^2.$$

Ἐὰν $3x^2+6x+9=(3-4x)^2$ θὰ εἶναι

$$x=\frac{30}{13} \quad \text{καὶ εἶναι}\ 3\left(\frac{30}{13}+1\right)^2+6=3\left(\frac{43}{13}\right)^2+6=\frac{6561}{169}=\left(\frac{81}{13}\right)^2.$$

Κατὰ τὴν (2), ἐὰν θέσωμεν $\mu^2=(x+1)^2$ θὰ ἔχωμεν

$$6x^2+12x+9=\sigma^2, \text{ ἔστω } =(3-3x)^2, \text{ ἐξ ἧς } x=10. \text{ Θὰ εἶναι ἄρα}$$

$$\mu^2=(x+1)^2=11^2=121 \text{ καὶ εἶναι } 6.121+3=27^2.$$

Ἐὰν $6x^2+12x+9=(3-5x)^2$, θὰ εἶναι $x=\frac{42}{19}$ καὶ εἶναι $6\left(\frac{42}{19}+1\right)^2+3=\left(\frac{153}{19}\right)^2$.

Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν εὑρισκομένων τετραγώνων $\lambda^2, \mu^2, \ldots$ εἶναι ὁσονδήποτε μεγάλον.

Γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha+\beta=\kappa^2$, ἡ παράστασις $\alpha y^2+\beta$ δύναται νὰ γίνῃ τετράγωνος, ἐὰν τεθῇ $y=x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι

$$\alpha(x+1)^2+\beta=\alpha x^2+2\alpha x+\alpha+\beta, = \text{τετράγωνος} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha x^2+\alpha x+\kappa^2, \text{ ἔστω } =(\kappa-\lambda x)^2, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$x=\frac{2(\alpha+\kappa\lambda)}{\lambda^2-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\lambda^2+2\kappa\lambda+\alpha}{\lambda^2-\alpha}, \quad (\lambda^2\neq\alpha).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον τοῦ VIου βιβλίου

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ y, z. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι

$$\frac{1}{2}yz+y=\alpha^2, \quad (1), \quad \frac{1}{2}yz+z=\beta^2, \quad (2).$$

Θέτει τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $(5x, 12x, 13x)$. Κατὰ τὴν (2) εἶναι

$$30x^2+12x=\beta^2, \quad (3), \text{ ἔστω } =36x^2, \text{ ἐξ ἧς } x=2,$$

ὁπότε πληροῦται τὸ ἐπίταγμα τοῦτο.

Κατὰ τὴν (1) εἶναι $30x^2+5x=\alpha^2$, (4). Διὰ $x=2$ εἶναι $\alpha^2=130$, ἤτοι ὁ 130 δὲν εἶναι τετράγωνος. Ὅθεν πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\beta^2=36x^2$. Ἔστω $\beta^2=\lambda^2x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $x=\frac{12}{\lambda^2-30}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἔχομεν

$$30\left(\frac{12}{\lambda^2-30}\right)^2+\frac{5\cdot 12}{\lambda^2-30}=\alpha^2, \text{ ἢ } \frac{60\lambda^2+2520}{(\lambda^2-30)^2}=\alpha^2, \text{ ἢ } 60\lambda^2+2520=\text{τετράγωνος}, (5).$$

Ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ὅταν $60+2520=$τετράγωνος (6). Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 2520. Ὁ $60=5\cdot 12$, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν $(5x, 12x)$. Ὁ ἀριθμὸς $2520=12(12-5)$. 30, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τῆς μεγαλυτέρας καθέτου (τῆς $12x$) ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τό, νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν σύν, τὴν μεγαλυτέραν κάθετον, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν, νὰ εἶναι τετράγωνος.

Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, (ἔστω ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2). Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα ἡ μεγαλυτέρα κάθετος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ βοηθητικοῦ τούτου τριγώνου τ, σ $(\tau>\sigma)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ

$$E=\frac{1}{2}\tau\sigma$$

θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς (5) $\sigma\tau+\tau(\tau-\sigma)E=$ τετράγωνος.

Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τ θὰ ἔχωμεν $\sigma+(\tau-\sigma)E=$ τετράγωνος, (7).

Ὅταν κατασκευασθῇ τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 αἱ πλευραί του θὰ εἶναι 3, 4, 5. Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν τετράγωνος, $4-3=1^2$, $4=2^2$ (ἡ μεγαλυτέρα κάθετος) καὶ $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3=3^2$.

Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ἐπειδὴ $\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3\right)=3^2$ εἶναι δυνατὸν νά εὑρεθῇ μέγα πλῆθος τετραγώνων, ὥστε τὸ γινόμενον ἑνὸς τετραγώνου ἐκ τούτων ἐπὶ ἕνα τῶν ἀριθμῶν (6 ἢ 3) σὺν τὸν ἄλλον νὰ εἶναι τετράγωνος. Εἷς ἐκ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι ἡ μονάς, ὁπότε εἶναι $6\cdot 1^2+3=3^2$, σχέσις ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν (7), ὅπου

$$\tau-\sigma=4-3=1^2,\quad E=6,\quad \sigma=3.$$

Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι (3, 4, 5). Κατόπιν τούτου θέτει τὰς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $3x$, $4x$, $5x$ (ἀντὶ τῶν $5x$, $12x$, $13x$).

Κατὰ τὴν (2) εἶναι $6x^2+4x=\beta^2$, ἔστω $=t^2x^2$, (8), καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2+3x=\alpha^2$, (9). Ἐκ τῆς (8) λαμβάνει $x=\frac{4}{t^2-6}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) ἔχει

$$\frac{12t^2+24}{t^4+36-12t^2}=\alpha^2,\ \text{ἢ}\ 12t^2+24=\alpha^2(t^2-6)^2,\ \text{ἢ}\ 3t^2+6=\text{τετράγωνος},\ (10).$$

Ἐπειδὴ $3+6=3^2$ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ὁ t κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα. Ἔστω $t=\lambda+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) λαμβάνεται $3(\lambda+1)^2+6=$τετράγωνος,

$$\text{ἔστω}=(3-3\lambda)^2,\ \text{ἐξ ἧς}\ \lambda=4,\ \lambda+1=t=5,\ t^2=25.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) εἶναι $6x^2+4x=25x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{19}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι

$$3\cdot\frac{4}{19}=\frac{12}{19},\quad 4\cdot\frac{4}{19}=\frac{16}{19},\quad 5\cdot\frac{4}{19}=\frac{20}{19},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{12}{19}=\left(\frac{18}{19}\right)^2\ \text{καὶ}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{16}{19}=\left(\frac{20}{19}\right)^2.$$