PROF. DR. J. E. HOFMANN

ZUR GEOMETRISCHEN DEUTUNG EINES ZAHLENTHEORETISCHEN VERFAHRENS AUS DIOPHANT

Herrn. E. Stamatis zur Vollendung seines 65. Lebensjahres gewidmet

Herr Stamatis gibt in **Platon 18,** 318—325 (1961) eine interessante **algebraische** Ausdeutung der Aufgaben 9 und 11 des 5. Buches der Diophantischen **Arithmetik.** Vielleicht ist es nicht unwillkommen, dieses Verfahren auch **geometrisch** zu wenden.

Ich beginne mit Aufgabe 9: Dort geht es im wesentlichen um die Bestimmung der Quadrate zweier positiver Rationalzahlen x, y, die den Bedingungen

$$(1)\quad x^2+y^2=a^2+b^2,\quad 2x^2>a^2+b^2-1,\quad 2y^2>a^2+b^2-1$$

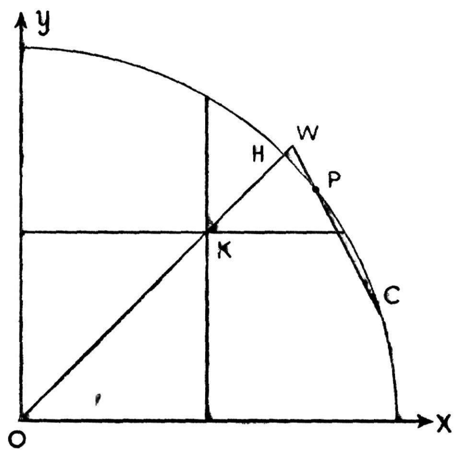
genügen. Hier sind auch die gegebenen Zahlen a und b positiv rational; Diophant rechnet zwar in besonderen Zahlen (a=3, b=2), meint jedoch allgemeine. Zunächst bestimmt er eine weitere positive Rationalzahl w so, dass

$$(2)\quad 2w^2=\text{ungefähr } a^2+b^2.$$

Das eingeschlagene Verfahren ist das aus Heron bekannte und bis auf altbabylonische Tradition zurückführbare des arithmetisch - geometrischen Mittels. Dann setzt Diophant

$$(3)\quad x=a+(w-a)t,\quad y=b+(w-b)t$$

in (1) ein und erhält eine lineare Gleichung in t, die das gewünschte Ergebnis liefert.



Die Abbildung zeigt, wie sich dieses Verfahren geometrisch deuten lässt: (1) ist die Gleichung eines Kreises in cartesischen Koordinaten; dessen Mittelpunkt ist (o ; o). Ein gegebener Umfangspunkt mit rationalen Koordinaten (wir wollen ihn kurz einen Rationalpunkt nennen) ist C (a ; b). Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des I. Quadranten mit dem Kreisbogen sei H

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,;\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right).$$

Zwischen ihm und dem Ursprung befindet sich der Punkt K

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2-1}{2}}\;;\;\sqrt{\frac{a^2+b^2-1}{2}}\right).$$

Das Verfahren, das zu einem passenden Wert w in (2) führt, liefert den Rationalpunkt W (w ; w) hinreichend nahe bei H. Er müsste nicht notwendig ausserhalb des Kreises liegen. Die Bestimmung von P (x ; y) kommt darauf hinaus, den von C verschiedenen Schnittpunkt von C W mit dem Kreis zu bestimmen. Liegt W nahe genug bei H, dann befindet sich P sicher rechts und oberhalb von K, erfüllt also die geforderten Bedingungen.

In Aufgabe 11 wird das Verfahren auf die Bestimmung von drei Quadraten ausgedehnt. Geometrisch gesprochen, haben wir die vorigen Ausführungen auf die Kugel zu übertragen. Bei mehr als drei Quadraten müssen wir zu Hyperkugeln übergehen.